Nombre y apellidos………..

n.mat.						

PRIMER PARCIAL (23/10/2015)

1. Dados los vectores $\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{u_3}=\begin{pmatrix}1\\-5\\3\\5\end{pmatrix}$, se pide:
   a) *(1 punto)* Encontrar una combinación lineal de dichos vectores que sea igual al vector $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$.b)*(1 punto)*¿Es posible ponerlo como combinación lineal de tan solo $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$?. Si es así, obtenerla.

SOLUCIÓN:

a) $\alpha\overline{u}_1+\beta\overline{u}_2+\gamma\overline{u}_3=(-1,2,-1,-2)$

Luego,

$$\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=-1\\-\alpha+\beta-5\gamma=2\\-\beta+3\gamma=-1\\\alpha-\beta+5\gamma=-2\end{cases}\approx\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=-1\\3\beta-9\gamma=3\\-\beta+3\gamma=-1\\3\beta-9\gamma=3\end{cases}\approx\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=-1\\-\beta+3\gamma=-1\end{cases}\to\begin{cases}2\alpha=-3t-1-t-1\\\beta=3t+1\\\gamma=t\end{cases}\to\begin{cases}\alpha=-2t-1\\\beta=3t+1\\\gamma=t\end{cases}$$

y si *t*, por ejemplo, es *1*, se tendría, $\alpha=-3,\beta=4$ y $\gamma=1$, con lo que: $-3\overline{u}_1+4\overline{u}_2+\overline{u}_3=(-1,2,-1,-2)$

b) Por otra parte, como el rango de la matriz de los coeficientes es *2*, también lo es el de su espacio columna, es decir el rango de $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\}$ es igual a *2*, luego tienen que existir α y β, tal que,

$$\alpha(2,-1,0,1)+\beta(1,1,-1,-1)u_3=(-1,2,-1,-2),\ \text{en efecto,}$$

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=-1\\-\alpha+\beta=2\\-\beta=-1\\\alpha-\beta=-2\end{cases}\approx\begin{cases}2\alpha+\beta=-1\\3\beta=3\\-\beta=-1\\3\beta=3\end{cases}\approx\begin{cases}2\alpha+\beta=-1\\\beta=1\end{cases}\to\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=1\end{cases}$$

2. Dados los SUBESPACIOS de $\mathbb{R}^4$ $S=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4; x+y=0\}$ y $T=L\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\}$

Nombre y apellidos…………						
n.mat.						

a)	*(0,5 puntos)* Dar las ecuaciones implícitas , una base y la dimensión del subespacio intersección de ambos.
b)	*(0,5 puntos)* Calcular una base y la dimensión del *subespacio* suma de ambos.
c)	*(0,5 puntos)* Estudiar si la suma de ambos es directa.
d)	*(0,5 puntos)* Justificar si S y T son subespacios complementarios o no lo son.

SOLUCIÓN:

a) $S \cap T \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-z+t=0 \end{cases}$, y $B(S\cap T) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $dim(S\cap T) = 2$.

b) $dim(S+T) = 4$ y $B(S+T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) $No\ lo\ es$ puesto que $S \cap T \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) $Al\ no\ ser\ directa\ la\ suma, no\ son\ sb.\ complementarios.$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y se pide

a) *(1 punto)* Calcular las matrices de cambio de base de la base B a la base canónica, ${B_c}^3$,y la de cambio de la base canónica ${B_c}^3$ a la base B.

b) *(1 punto)* Sabiendo que la matriz del endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en la base B es $\mathcal{M}(\mathrm{f},\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz del endomorfismo f referida a la base canónica $\mathcal{M}(\mathrm{f}, {B_c}^3)$.

SOLUCIÓN:

a) $\mathrm{C}(\mathrm{B}, {B_c}^3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{C}({B_c}^3, \mathrm{B}) = {}^1\!/_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{M}(\mathrm{f}, {B_c}^3) = \mathrm{C}(\mathrm{B}, {B_c}^3)\mathcal{M}(\mathrm{f},\mathrm{B})\mathrm{C}({B_c}^3, \mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Dada una aplicación lineal $\mathrm{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de manera que : $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Se pide

$a)$ *(0,5 puntos)* obtener su matriz con respecto a las bases canónicas.

c) *(0,5 puntos)* Calcular una base del subespacio núcleo Ker(f)

d) *(0,5 puntos)* Las ecuaciones implícitas de la imagen Im(f).

e) *(0,5 puntos)*¿Es monomorfismo?, ¿Es Epimorfismo?. Sin explicación la respuesta no es válida.

SOLUCIÓN:

Nombre y apellidos………..						
n.mat.						

a) Como $(1,0,0) = (1,1,0) + (0,-1,0), (0,1,0) = -(0,-1,0), y\ (0,0,1)$=$(1,1,1) - (1,1,0)$, será

$$f(1,0,0) = (2,0,1), f(0,1,0) = (0,1,0), f(0,0,1) = (0,-1,0)$$

Entonces $\mathcal{M}(f, B_3^C, B_3^C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) El subespacio-núcleo de la aplicación se calcula resolviendo el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Vemos que admite como solución una recta de $\mathbb{R}^3$y B(Ker(f))=$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

c) Las columnas de la matriz son un sistema de generadores del subespacio imagen, es decir Im(f) = $\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, y al ser estos vectores linealmente independientes , son una base de Im(f). Sus e.i. las calculamos con:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \equiv 2z - x = 0$$

Es decir un plano de $\mathbb{R}^3$, de dimensión dos .

d) No es monomorfismo, pues Ker(f) $\neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Tampoco es Epimorfismo pues Im(f) $\neq \mathbb{R}^3$

5. a) *(0,5 puntos)* Calcular los autovalores asociados a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y sus multiplicidades algebráicas respectivas.

b) *(1 punto)* Calcular una base de cada subespacio propio Ker(A- λ I).c) *(0,5 puntos)* A la vista de lo anterior deducir si A es diagonizable o no. Si lo fuera, dar la matriz diagonal $\boldsymbol{\Lambda}$ semejante a la matriz A.

SOLUCIÓN:

a) Los autovalores son $\lambda = 1$, con m(1)=2 y $\lambda = 2$ de m(2)=1.

b) La base de Ker(A- I) de dimensión 2`puede ser B(.Ker(A- I))=$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y la del Ker(A- 2I) de dimensión 1 puede ser B(.Ker(A- 2I))=$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, por lo tanto es m($\lambda$)=g($\lambda$), para ambos autovalores.

Concluimos que la matriz es diagonalizable y que $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.